Économie, Transport, Évolution

la théorie des jeux et ses avatars

Pierre Bernhard
Directeur de recherches émérite à l'INRIA

SKEMA, le 1er octobre 2010

Le paradoxe de Braess

En 1969, à Stuttgart, il a fallu fermer à la circulation une voie récemment ouverte. Son ouverture avait fait empirer les encombrements qu'elle était destinée à faire diminuer.

Le paradoxe de Braess

En 1969, à Stuttgart, il a fallu fermer à la circulation une voie récemment ouverte. Son ouverture avait fait empirer les encombrements qu'elle était destinée à faire diminuer.

Pour comprendre ce phénomène, il faut comprendre l'effet *collectif* de comportements *individuellement optimaux (égoïstes)*

Le paradoxe de Braess

En 1969, à Stuttgart, il a fallu fermer à la circulation une voie récemment ouverte. Son ouverture avait fait empirer les encombrements qu'elle était destinée à faire diminuer.

Pour comprendre ce phénomène, il faut comprendre l'effet *collectif* de comportements *individuellement optimaux (égoïstes)*

Nous allons montrer et analyser un exemple d'école où l'ouverture d'un pont entre deux voies fait empirer les temps de parcours de tout le monde.

Évolution & écologie comportementale

Dans une même espèce, coexistent des individus adoptant des comportements différents, par exemple des individus pacifiques et des individus agressifs. (On parle de *traits* différents.)

Comment l'évolution a-t-elle pu faire ça ? Pourquoi l'espèce n'a-t-elle pas convergé, au cours de l'évolution, vers le comportement le plus efficace des deux ?

Théorie des jeux

Pourquoi, pour quoi ?

Ce que la théorie des jeux n'est pas:

- Une "théorie" pour gagner à la roulette ou autre jeu de casino
- Une théorie des jeux vidéos

Pourquoi, pour quoi ?

Ce que la théorie des jeux n’est pas:

- Une “théorie” pour gagner à la roulette ou autre jeu de casino
- Une théorie des jeux vidéos

Ce que la théorie des jeux est ou pourrait être:

Comportement logique en présence d’intérêts divergents

Pourquoi, pour quoi ?

Ce que la théorie des jeux n'est pas:

- Une "théorie" pour gagner à la roulette ou autre jeu de casino
- Une théorie des jeux vidéos

Ce que la théorie des jeux est ou pourrait être:

Comportement logique en présence d'intérêts divergents

- Une théorie positive: prédictive ou explicative. $\longrightarrow$ ÉCHEC

Pourquoi, pour quoi ?

Ce que la théorie des jeux n'est pas:

- Une "théorie" pour gagner à la roulette ou autre jeu de casino
- Une théorie des jeux vidéos

Ce que la théorie des jeux est ou pourrait être:

Comportement logique en présence d'intérêts divergents

- Une théorie positive: prédictive ou explicative. $\longrightarrow$ ÉCHEC
- Une théorie normative, ou d'aide à la décision.

Le livre fondateur

Theory of Games and Economic Behavior

John von Neumann & Oskar Morgenstern

Princeton University Press

1944

Le livre fondateur

Theory of Games and Economic Behavior

Théorie des jeux et du comportement économique

John von Neumann & Oskar Morgenstern

Princeton University Press

1944

Le dilemme du prisonnier

Deux malandrins ont été arrêtés alors qu'ils venaient de perpétrer ensemble quelque forfait. Ils sont placés au secret, et vont être interrogés séparément. Chacun peut avouer ou nier. S'ils nient tous les deux, ils seront, faute de preuves, relâchés tous les deux à l'issue d'une longue procédure, et auront passé chacun 1 an en prison. S'ils avouent tous les deux, ils seront condamnés à cinq ans de prison. Mais si l'un avoue et que l'autre nie, le premier, pour prix de sa collaboration avec la justice, sera relâché immédiatement, tandis que le vilain, qui a voulu cacher la vérité, fera 10 ans de prison.

Que *devraient-ils* faire ? que *vont-ils* faire ?

Le dilemme du prisonnier

Deux malandrins ont été arrêtés alors qu'ils venaient de perpétrer ensemble quelque forfait. Ils sont placés au secret, et vont être interrogés séparément. Chacun peut avouer ou nier. S'ils nient tous les deux, ils seront, faute de preuves, relâchés tous les deux à l'issue d'une longue procédure, et auront passé chacun 1 an en prison. S'ils avouent tous les deux, ils seront condamnés à cinq ans de prison. Mais si l'un avoue et que l'autre nie, le premier, pour prix de sa collaboration avec la justice, sera relâché immédiatement, tandis que le vilain, qui a voulu cacher la vérité, fera 10 ans de prison.

Ils ont tous les deux avoué ! Pourquoi ?

Dilemme du prisonnier 2

$1\backslash 2$	a	n
a	5, 5	0, 10
n	10, 0	1, 1

Dilemme du prisonnier 2

1\2	a	n
a	5 5	10 0
n	0 10	1 1

Dilemme du prisonnier 2

1\2	a	n
a	5 5	10 0
n	0 10	1 1

Dilemme du prisonnier 2

$1\backslash 2$		a		n
		5		10
a	5		0	
		0		1
n	10		1	

$nier$ est une stratégie dominée : toujours moins bonne qu'$avouer$.

$(avouer, avouer)$ est un Équilibre de Nash : aucun des deux, en changeant seul sa décision, ne peut améliorer sa situation.

Des Bordures et des Syldaves

Le général bordure a reçu de l'horrible dictateur Pleksigladtz l'ordre d'envahir la pacifique Syldavie sur laquelle règne le bon roi Oskar IV. Il doit franchir avec son armée la chaîne de montagnes qui sépare les deux pays. Il peut passer soit par une large vallée, soit par un col difficile défendu par les partisans syldaves.

Le général syldave peut positionner son armée au sortir de l'un ou l'autre passage. S'il se trompe, la Syldavie sera envahie. Si les deux armées se rencontrent au débouché de la vallée, les chances sont égales que la Syldavie soit envahie, ou que l'envahisseur soit repoussé. Si enfin les deux se rencontrent au pied du col, il y a trois chances sur quatre que l'envahisseur, affaibli par les partisans, soit repoussé.

Des Bordures et des Syldaves

Le général bordure a reçu de l'horrible dictateur Pleksigladtz l'ordre d'envahir la pacifique Syldavie sur laquelle règne le bon roi Oskar IV. Il doit franchir avec son armée la chaîne de montagnes qui sépare les deux pays. Il peut passer soit par une large vallée, soit par un col difficile défendu par les partisans syldaves.

Le général syldave peut positionner son armée au sortir de l'un ou l'autre passage. S'il se trompe, la Syldavie sera envahie. Si les deux armées se rencontrent au débouché de la vallée, les chances sont égales que la Syldavie soit envahie, ou que l'envahisseur soit repoussé. Si enfin les deux se rencontrent au pied du col, il y a trois chances sur quatre que l'envahisseur, affaibli par les partisans, soit repoussé.

Que devraient-ils faire ?

Des Bordures et des Syldaves

Le général bordure a reçu de l'horrible dictateur Pleksigladtz l'ordre d'envahir la pacifique Syldavie sur laquelle règne le bon roi Oskar IV. Il doit franchir avec son armée la chaîne de montagnes qui sépare les deux pays. Il peut passer soit par une large vallée, soit par un col difficile défendu par les partisans syldaves.

Le général syldave peut positionner son armée au sortir de l'un ou l'autre passage. S'il se trompe, la Syldavie sera envahie. Si les deux armées se rencontrent au débouché de la vallée, les chances sont égales que la Syldavie soit envahie, ou que l'envahisseur soit repoussé. Si enfin les deux se rencontrent au pied du col, il y a trois chances sur quatre que l'envahisseur, affaibli par les partisans, soit repoussé.

Il n'y a pas de solution rationnelle

Que devraient-ils faire ?

Théorie de la décision

Décision	a	b	c	d
Gains	2	8	4	0

Théorie de la décision

stochastique

Décision		a	b	c	d
Gains	1/2	2	8	4	0
	1/2	2	0	2	2

Théorie de la décision

stochastique

Décision		a	b	c	d
Gains	1/2	2	8	4	0
	1/2	2	0	2	2
Espérance		2,0	4,0	3,0	1,0

Théorie de la décision

stochastique

Décision		a	b	c	d
Gains	1/4	2	8	4	0
	3/4	2	0	2	2

Théorie de la décision

stochastique

Décision		a	b	c	d
Gains	1/4	2	8	4	0
	3/4	2	0	2	2
Espérance		2,0	2,0	2,5	1,5

Bordures et Syldaves 2

B \ S	v	c
v	0,5	1
c	1	0,25

Bordures et Syldaves 2

S / B		v	c
v	0,6	0,5	1
c	0,4	1	0,25

Stratégies mixtes

Bordures et Syldaves 2

S B		v	c
v	0,6	0,5	1
c	0,4	1	0,25

0,7

Stratégies mixtes

Bordures et Syldaves 2

B \ S		v	c
v	0,6	0,5	1
c	0,4	1	0,25
		0,7	0,7

Stratégies mixtes

Bordures et Syldaves 2

B \ S		v	c	
		0,6	0,4	
v	0,6	0,5	1	0,7
c	0,4	1	0,25	0,7
		0,7	0,7	

Aucun des deux, en changeant seul ne peut faire mieux. Un Équilibre de Nash

Bordures et Syldaves 3

B \ S	v	c
v	0,5	1
c	0,75	0,25

Bordures et Syldaves 3

S / B		v 0,75	c 0,25	
v	0,5	0,5	1	0,625
c	0,5	0,75	0,25	0,625
		0,625	0,625	

Équilibre de Nash

Équilibre de Wardrop

Stratégie évolutionnairement stable

E.S.S.

Circulation et équilibre de Wardrop

Devinette Dans cette ville embouteillée, mille automobilistes pressés veulent aller de A à B à la même heure. Tous prennent le chemin le plus rapide possible. Et pourtant ils se distribuent sur différents chemins.

Comment est-ce possible ?

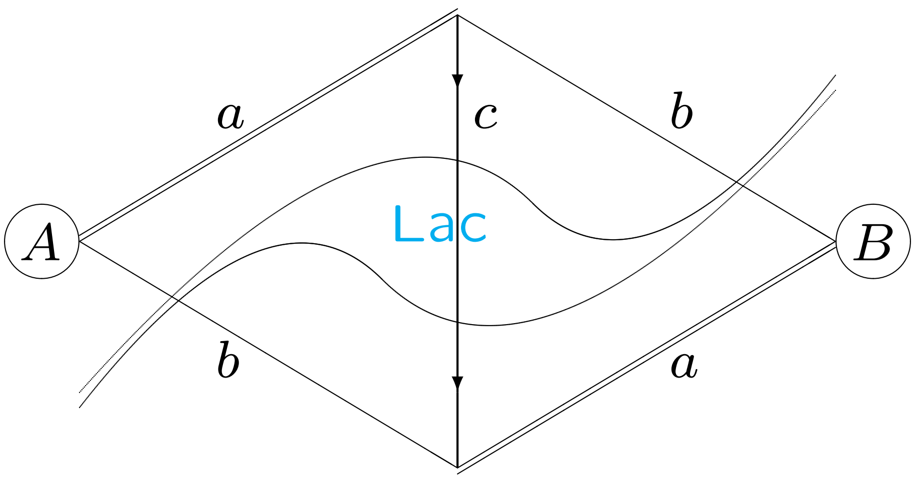
Circulation et équilibre de Wardrop

Devinette Dans cette ville embouteillée, mille automobilistes pressés veulent aller de A à B à la même heure. Tous prennent le chemin le plus rapide possible. Et pourtant ils se distribuent sur différents chemins.

Comment est-ce possible ?

Réponse Tous les chemins utilisés prennent le même temps.

Le réseau routier de Braess



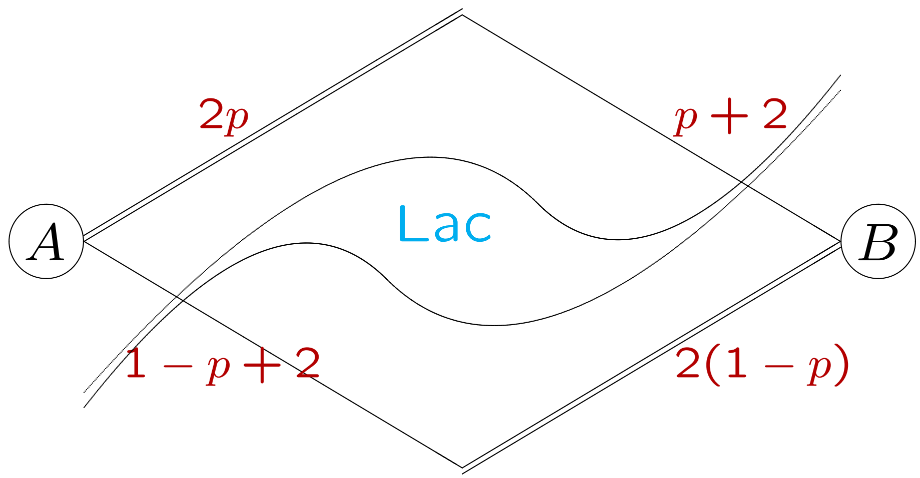
Les temps de parcours dépendent du type de voie : a, b ou c, et dépendent du traffic de façon affine (ou linéaire).

Réseau de Braess : données

Soit $p \in [0, 1]$ la proportion des 1000 automobilistes qui parcourent une voie donnée. Le temps de parcours d'un lien de type

- a est $2p$,
- b est $p + 2$,
- c est p.

Sans le pont



$T_{Nord} = 3p + 2$, $T_{Sud} = 3(1-p) + 2$. Si l'un est plus rapide que l'autre, ça se saura, des usagers changeront de route. À l'équilibre, $p = 1/2$ et $T = 3{,}5$.

Avec le pont

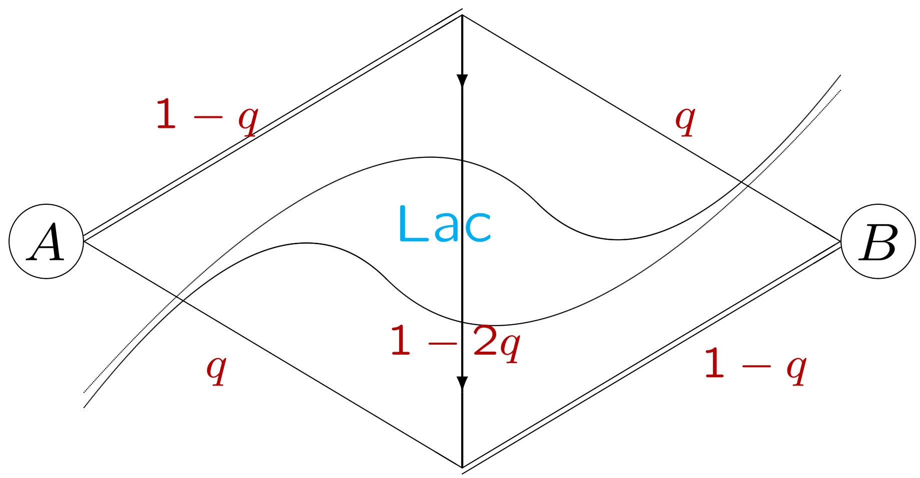
Avec le pont, l'équilibre $p = 1 - p = 1/2$ n'est pas stable : si la population se divise en un parcours nord et un parcours sud, personne n'utilisant le pont, un petit malin prendra le pont, seul, en un temps (pratiquement) nul, et fera le parcours en un temps $T = 2$, bien plus rapide que les autres.

Avec le pont

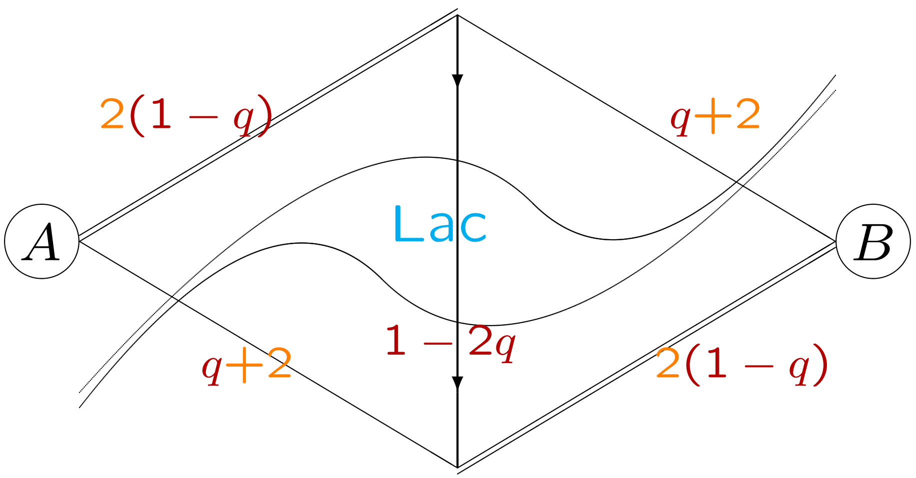
Avec le pont, l'équilibre $p = 1 - p = 1/2$ n'est pas stable : si la population se divise en un parcours nord et un parcours sud, personne n'utilisant le pont, un petit malin prendra le pont, seul, en un temps (pratiquement) nul, et fera le parcours en un temps $T = 2$, bien plus rapide que les autres.

Le traffic se ré-équilibrera jusqu'à ce que les trois parcours prennent le même temps. Soit une proportion q sur chaque parcours Nord et Sud, et $1 - 2q$ via le pont. Il y aura donc un traffic $1 - q$ sur les liens a, q sur les liens b, et $1 - 2q$ sur le pont.

Avec le pont : traffic



Avec le pont : temps de parcours



Équilibre : $2(1-q)+q+2 = 4(1-q)+1-2q$,

$q = 1/5, \qquad T = 3{,}8.$

Le réseau de Braess : analyse systématique

Soient $a_0 + a_1 p$, $b_0 + b_1 p$ et $c_0 + c_1 p$ les temps de parcours des voies de type a, b et c respectivement. Posons

$$A = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & 0 & a_1 \\ 0 & a_1 + b_1 & a_1 \\ a_1 & a_1 & 2a_1 + c_1 \end{pmatrix}, \quad t_0 = \begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ a_0 + b_0 \\ 2a_0 + c_0 \end{pmatrix},$$

Le réseau de Braess : analyse systématique

Soient $a_0 + a_1 p$, $b_0 + b_1 p$ et $c_0 + c_1 p$ les temps de parcours des voies de type a, b et c respectivement. Posons

$$A = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & 0 & a_1 \\ 0 & a_1 + b_1 & a_1 \\ a_1 & a_1 & 2a_1 + c_1 \end{pmatrix}, \quad t_0 = \begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ a_0 + b_0 \\ 2a_0 + c_0 \end{pmatrix},$$

Soient p_1, p_2, p_3 les population des itinéraires Nord, Sud et pont. Les trois temps de parcours sont donnés par $t = t_0 + Ap \in \mathbb{R}^3$.

Le réseau de Braess : analyse systématique

Soient $a_0 + a_1 p$, $b_0 + b_1 p$ et $c_0 + c_1 p$ les temps de parcours des voies de type a, b et c respectivement. Posons

$$A = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & 0 & a_1 \\ 0 & a_1 + b_1 & a_1 \\ a_1 & a_1 & 2a_1 + c_1 \end{pmatrix}, \quad t_0 = \begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ a_0 + b_0 \\ 2a_0 + c_0 \end{pmatrix},$$

Soient p_1, p_2, p_3 les population des itinéraires Nord, Sud et pont. Les trois temps de parcours sont donnés par $t = t_0 + Ap \in \mathbb{R}^3$. Posons $\mathbb{1}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a résolu l'équation $p \in \mathbb{R}^3$, $T \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} A & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1}^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et vérifié que $p_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$.

Équilibre de Wardrop complet

En fait, certains chemins trop longs peuvent n'être pas utilisés. Soit $f(p)$ le vecteur des efficacités. On cherche un *support* (une liste de $n_1 < n$ coordonnées), et $p_1 > 0 \in \mathbb{R}^{n_1}$ tels que, $\langle \mathbb{1}, p_1 \rangle = 1$ et, à une renumérotation des coordonnées près,

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(p) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}F \\ \phi \end{pmatrix}.$$

avec $\phi >> \mathbb{1}F$ si on *minimise*. $\phi << \mathbb{1}F$ si on *maximise*;

Équilibre de Wardrop complet

En fait, certains chemins trop longs peuvent n'être pas utilisés. Soit $f(p)$ le vecteur des efficacités. On cherche un *support* (une liste de $n_1 < n$ coordonnées), et $p_1 > 0 \in \mathbb{R}^{n_1}$ tels que, $\langle \mathbb{1}, p_1 \rangle = 1$ et, à une renumérotation des coordonnées près,

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(p) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}F \\ \phi \end{pmatrix}.$$

avec $\phi >> \mathbb{1}F$ si on *minimise.* $\phi << \mathbb{1}F$ si on *maximise*;

Théorème Si f est continue, un équilibre de Wardrop existe.

Équilibre de Wardrop complet

En fait, certains chemins trop longs peuvent n'être pas utilisés. Soit $f(p)$ le vecteur des efficacités. On cherche un *support* (une liste de $n_1 < n$ coordonnées), et $p_1 > 0 \in \mathbb{R}^{n_1}$ tels que, $\langle \mathbb{1}, p_1 \rangle = 1$ et, à une renumérotation des coordonnées près,

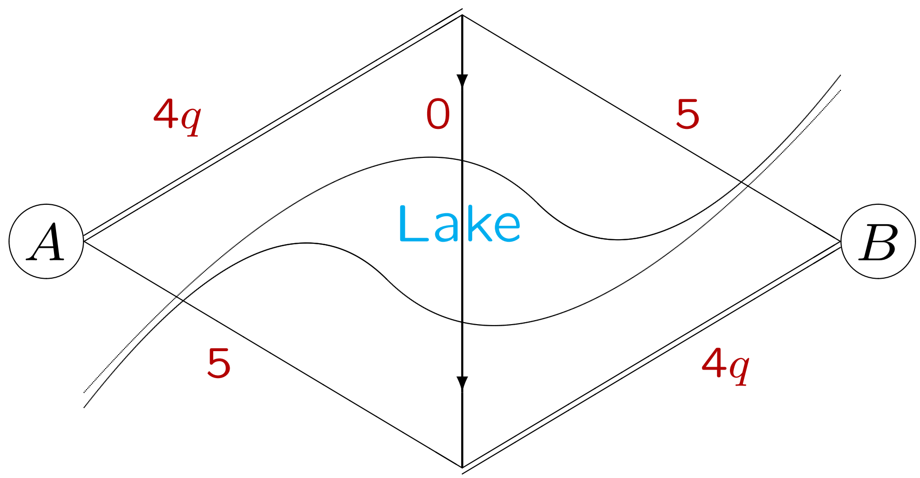
$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(p) = \begin{pmatrix} \mathbb{1}F \\ \phi \end{pmatrix}.$$

avec $\phi >> \mathbb{1}F$ si on *minimise.* $\phi << \mathbb{1}F$ si on *maximise*;

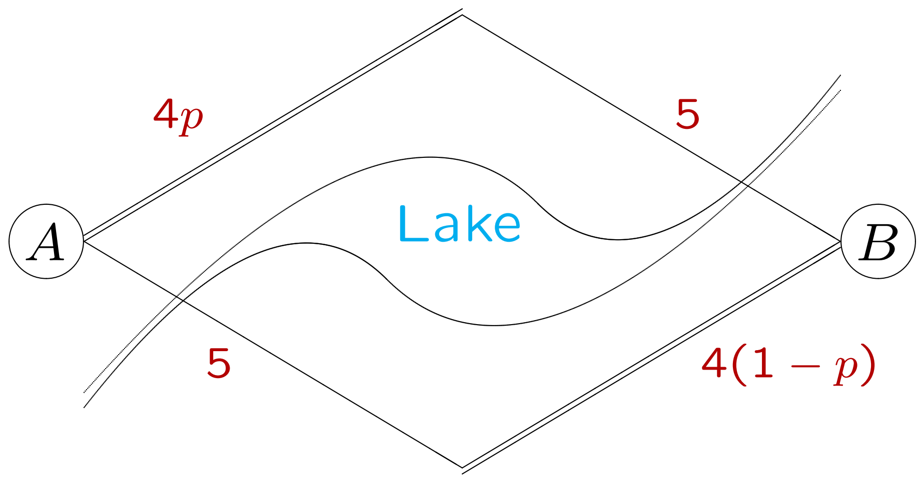
Théorème Si f est continue, un équilibre de Wardrop existe.

Exercice Traiter le cas f affine, et examiner le réseau de Braess avec $a_1 = 4, b_0 = 5$, $a_0 = b_1 = c_0 = c_1 = 0$, avec et sans pont (**!**)

Un paradoxe de Braess fort

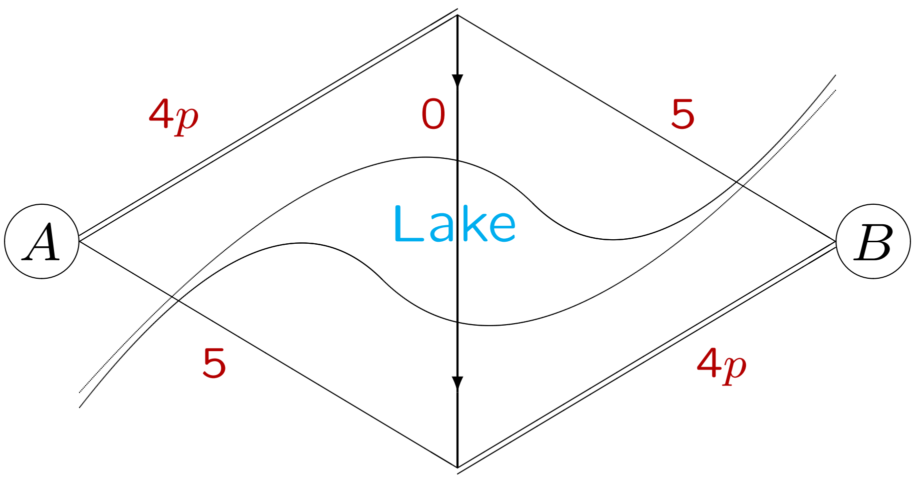


Un paradoxe de Braess fort



Sans le pont : $p = 1/2$, $T = 7$.

Un paradoxe de Braess fort



Sans le pont : $p = 1/2$, $T = 7$.

Avec le pont : $p = 1$, $T = 8$. Tout le trafic passe par le pont.

(Personne n'utilise les voies lentes de type b.)

Biologie de l'évolution

Faucons et colombes

Dans une même espèce, coexistent des individus adoptant des comportements différents. Par exemple, des individus qui confrontés à un congénère pour se saisir d'une proie ont un comportement pacifique ("colombes") quand d'autres sont agressifs ("faucons"). (On parle de *traits* différents.)

Pourquoi l'espèce n'a-t-elle pas convergé, au cours de l'évolution, vers le comportement le plus efficace des deux ?

Faucons et colombes : le modèle

Quand deux individus sont confrontés pour saisir une même proie, résultat suivant le comportement pacifique (“$c$olombe”) ou agressif (“$f$aucon”) de chaque :

$1\backslash 2$	c	f
c	0,5 0,5	1 0
f	0 1	$-\theta$ $-\theta$

$\theta > 0$ pour $\theta\alpha\nu\alpha\tau o\varsigma$, le risque de mort qui diminue la “fitness” (efficacité reproductive).

Faucons et colombes : l'analyse

Quand deux individus sont confrontés pour saisir une même proie, résultat suivant le comportement pacifique ("$c$olombe") ou agressif ("$f$aucon") de chaque.

$1\backslash 2$	c	f
c	0,5 0,5	1 0
f	0 1	$-\theta$ $-\theta$

$\theta > 0$ pour $\theta\alpha\nu\alpha\tau o\varsigma$, le risque de mort qui diminue la "fitness" (efficacité reproductive).

Faucons et colombes : l’analyse

Quand deux individus sont confrontés pour saisir une même proie, résultat suivant le comportement pacifique (“$c$olombe”) ou agressif (“$f$aucon”) de chaque.

1\2	c	f
c	0,5 0,5	1 0
f	0 1	$-\theta$ $-\theta$

$\theta > 0$ pour $\theta\alpha\nu\alpha\tau o\varsigma$, le risque de mort qui diminue la “fitness” (efficacité reproductive).

Faucons et colombes : l'analyse

Si la population est constituée de (beaucoup plus de) "colombes", les "faucons" auront un avantage reproductif, leur proportion dans la population croîtra. Au contraire, s'il y a beaucoup de "faucons", les "colombes" auront un avantage reproductif, leur proportion croîtra.

Faucons et colombes : l'analyse

Si la population est constituée de (beaucoup plus de) “colombes”, les “faucons” auront un avantage reproductif, leur proportion dans la population croîtra. Au contraire, s'il y a beaucoup de “faucons”, les “colombes” auront un avantage reproductif, leur proportion croîtra.

Dans une population *polymorphe* (mélangée), avec une proportion p de “colombes” et $1-p$ de “faucons”, chaque individu rencontre des “colombes” ou des “faucons” dans les mêmes proportions de ses rencontres, ou avec ces probabilités à chaque rencontre. Il est confronté à une *stratégie mixte* de la population.

Faucons et colombes : l'équilibre

D'après l'analyse précédente, si la proportion p de “colombes” est grande, elle aura tendance à décroître, si p est petite, elle aura tendance à croître.

L'équilibre sera atteint quand les “faucons” et les “colombes” auront la même “fitness”, soit pour une proportion p de “colombes” telle que

$$0{,}5p = p - \theta(1-p)\,,$$

soit $p = \theta/(0{,}5+\theta)$. C'est la stratégie évolutionnairement stable.

E.S.S.

Soit q le vecteur des fréquences des traits. Le vecteur des fitness des différentes stratégies (traits) est donné par $f = Aq$. La fitness d'une sous-population caractérisée par des fréquences de traits r dans une population q est $\langle r, f \rangle = \langle r, Aq \rangle$

E.S.S.

Soit q le vecteur des fréquences des traits. Le vecteur des fitness des différentes stratégies (traits) est donné par $f = Aq$. La fitness d'une sous-population caractérisée par des fréquences de traits r dans une population q est $\langle r, f \rangle = \langle r, Aq \rangle$

Une distribution p est évolutionnairement stable si, envahie par une sous-population de poids total $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, de distribution q, soit une population totale de distribution

$$(1 - \varepsilon)p + \varepsilon q$$

E.S.S.

Soit q le vecteur des fréquences des traits. Le vecteur des fitness des différentes stratégies (traits) est donné par $f = Aq$. La fitness d'une sous-population caractérisée par des fréquences de traits r dans une population q est $\langle r, f\rangle = \langle r, Aq\rangle$

Une distribution p est évolutionnairement stable si, envahie par une sous-population de poids total $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, de distribution q, elle est plus efficace: $\forall q \in \Sigma_n\,,\ \exists \varepsilon_0 > 0$:

$$\forall \varepsilon < \varepsilon_0\,, \quad \langle p, A((1-\varepsilon)p + \varepsilon q)\rangle > \langle q, A((1-\varepsilon)p + \varepsilon q)\rangle\,.$$

E.S.S., suite

p est un ESS si $\forall q \in \Sigma_n\,,\ \exists \varepsilon_0 > 0$:

$$\forall \varepsilon < \varepsilon_0\,, \quad \langle p, A((1-\varepsilon)p + \varepsilon q)\rangle > \langle q, A((1-\varepsilon)p + \varepsilon q)\rangle\,.$$

E.S.S., suite

p est un ESS si $\forall q \in \Sigma_n\,,\ \exists \varepsilon_0 > 0$:

$$\forall \varepsilon < \varepsilon_0\,, \quad \langle p, A((1-\varepsilon)p + \varepsilon q)\rangle > \langle q, A((1-\varepsilon)p + \varepsilon q)\rangle\,.$$

soit

(1) (faire $\varepsilon \to 0$) $\forall q \in \Sigma_n\,, \quad \langle p, Ap\rangle \geq \langle q, Ap\rangle$, $\Leftrightarrow$ Wardrop eq.,

,

E.S.S., suite

p est un ESS si $\forall q \in \Sigma_n\,,\ \exists \varepsilon_0 > 0$:

$$\forall \varepsilon < \varepsilon_0\,, \quad \langle p, A((1-\varepsilon)p + \varepsilon q)\rangle > \langle q, A((1-\varepsilon)p + \varepsilon q)\rangle\,.$$

soit

(1) (faire $\varepsilon \to 0$) $\forall q \in \Sigma_n\,, \quad \langle p, Ap\rangle \geq \langle q, Ap\rangle$, $\Leftrightarrow$ Wardrop eq.,

(2) $\forall q : \langle q, Ap\rangle = \langle p, Ap\rangle$, $\langle p, Aq\rangle > \langle q, Aq\rangle$.

E.S.S., suite

p est un ESS si $\forall q \in \Sigma_n\,,\ \exists \varepsilon_0 > 0$:

$$\forall \varepsilon < \varepsilon_0\,, \quad \langle p, A((1-\varepsilon)p + \varepsilon q)\rangle > \langle q, A((1-\varepsilon)p + \varepsilon q)\rangle\,.$$

soit

(1) (faire $\varepsilon \to 0$) $\forall q \in \Sigma_n\,, \quad \langle p, Ap\rangle \geq \langle q, Ap\rangle$, $\Leftrightarrow$ Wardrop eq.,

(2) $\forall q : \langle q, Ap\rangle = \langle p, Ap\rangle,\ \langle p, Aq\rangle > \langle q, Aq\rangle.$

(1) Wardrop: $Ap = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{10} \\ A_{01} & A_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}F \\ \phi \end{pmatrix}, \phi << \mathbb{1}F,$

E.S.S., suite

p est un ESS si $\forall q \in \Sigma_n\,,\ \exists\varepsilon_0 > 0$:

$$\forall\varepsilon < \varepsilon_0\,,\quad \langle p, A((1-\varepsilon)p + \varepsilon q)\rangle > \langle q, A((1-\varepsilon)p + \varepsilon q)\rangle\,.$$

soit

(1) (faire $\varepsilon \to 0$) $\forall q \in \Sigma_n\,,\quad \langle p, Ap\rangle \geq \langle q, Ap\rangle\,, \Leftrightarrow$ Wardrop eq.,

(2) $\forall q : \langle q, Ap\rangle = \langle p, Ap\rangle$, $\langle p, Aq\rangle > \langle q, Aq\rangle$.

(1) Wardrop: $Ap = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{10} \\ A_{01} & A_{00} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\!\!1 F \\ \phi \end{pmatrix}, \phi << 1\!\!1 F,$

condition (2) : $\forall q_1 \in \Sigma_{n_1}\,,\quad \langle p_1 - q_1, A_{11}(p_1 - q_1)\rangle < 0.$

E.S.S., suite

p est un ESS si $\forall q \in \Sigma_n\,,\ \exists \varepsilon_0 > 0$:

$$\forall \varepsilon < \varepsilon_0\,, \quad \langle p, A((1-\varepsilon)p + \varepsilon q)\rangle > \langle q, A((1-\varepsilon)p + \varepsilon q)\rangle\,.$$

soit

(1) (faire $\varepsilon \to 0$) $\forall q \in \Sigma_n\,, \quad \langle p, Ap\rangle \geq \langle q, Ap\rangle$, $\Leftrightarrow$ Wardrop eq.,

(2) $\forall q : \langle q, Ap\rangle = \langle p, Ap\rangle$, $\langle p, Aq\rangle > \langle q, Aq\rangle$.

(1) Wardrop: $Ap = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{10} \\ A_{01} & A_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}F \\ \phi \end{pmatrix}, \phi << \mathbb{1}F$,

condition (2) : $\forall q_1 \in \Sigma_{n_1}\,, \quad \langle p_1 - q_1, A_{11}(p_1 - q_1)\rangle < 0.$

Remarque : $p_1 - q_1$ n'est pas quelconque: est $\perp \mathbb{1}$.

Test matriciel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 9 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Test matriciel

$$\sigma(A) = \begin{pmatrix} 1 & & 4 & & 5 \\ & -7 & & 5 & \\ 7 & & 3 & & 9 \\ & 6 & & -10 & \\ 4 & & 6 & & 2 \end{pmatrix}$$

Test matriciel

$$\sigma(A) = \begin{pmatrix} 1 & & 4 & & 5 \\ & -7 & & 5 & \\ 7 & & 3 & & 9 \\ & 6 & & -10 & \\ 4 & & 6 & & 2 \end{pmatrix}$$

A réussit le test :

$$\sigma(A) + \sigma(A)^t = \begin{pmatrix} -14 & 11 \\ 11 & -20 \end{pmatrix} < 0\,.$$

Effectif d'une ponte de parasitoïde

Une espèce de parasitoïdes pond ses œufs dans un "hôte". C'est un parasitoïde "grégaire", i.e. plusieurs jeunes peuvent émerger du même hôte "super-parasité".

La population est telle qu'on estime qu'exactement deux femelles parasitoïdes parasiteront chaque hôte.

Effectif d'une ponte de parasitoïde

Une espèce de parasitoïdes pond ses œufs dans un "hôte". C'est un parasitoïde "grégaire", i.e. plusieurs jeunes peuvent émerger du même hôte "super-parasité".

La population est telle qu'on estime qu'exactement deux femelles parasitoïdes parasiteront chaque hôte. Mais le devenir des œufs pondus dépend du nombre d'œufs dans l'hôte.

Deux œufs dans le même hôte produisent toujours deux jeunes.

Effectif d'une ponte de parasitoïde

Une espèce de parasitoïdes pond ses œufs dans un "hôte". C'est un parasitoïde "grégaire", i.e. plusieurs jeunes peuvent émerger du même hôte "super-parasité".

La population est telle qu'on estime qu'exactement deux femelles parasitoïdes parasiteront chaque hôte. Mais le devenir des œufs pondus dépend du nombre d'œufs dans l'hôte.

Deux œufs dans le même hôte produisent toujours deux jeunes. Trois œufs produisent trois jeunes avec une probabilité $\pi(> 1/3)$, et avec une probabilité $1 - \pi$ tueront l'hôte trop tôt $\Rightarrow$ 0 jeune.

Effectif d'une ponte de parasitoïde

Une espèce de parasitoïdes pond ses œufs dans un "hôte". C'est un parasitoïde "grégaire", i.e. plusieurs jeunes peuvent émerger du même hôte "super-parasité".

La population est telle qu'on estime qu'exactement deux femelles parasitoïdes parasiteront chaque hôte. Mais le devenir des œufs pondus dépend du nombre d'œufs dans l'hôte.

Deux œufs dans le même hôte produisent toujours deux jeunes. Trois œufs produisent trois jeunes avec une probabilité $\pi(> 1/3)$, et avec une probabilité $1 - \pi$ tueront l'hôte trop tôt $\Rightarrow$ 0 jeune. Plus de trois œufs tueront toujours l'hôte trop tôt $\Rightarrow$ 0 jeune.

Effectif d'une ponte de parasitoïde

Une espèce de parasitoïdes pond ses œufs dans un "hôte". C'est un parasitoïde "grégaire", i.e. plusieurs jeunes peuvent émerger du même hôte "super-parasité".

La population est telle qu'on estime qu'exactement deux femelles parasitoïdes parasiteront chaque hôte. Mais le devenir des œufs pondus dépend du nombre d'œufs dans l'hôte.

Deux œufs dans le même hôte produisent toujours deux jeunes. Trois œufs produisent trois jeunes avec une probabilité $\pi(> 1/3)$, et avec une probabilité $1 - \pi$ tueront l'hôte trop tôt $\Rightarrow$ 0 jeune. Plus de trois œufs tueront toujours l'hôte trop tôt $\Rightarrow$ 0 jeune.

Combien d'œufs chaque femelle devrait-elle pondre par hôte ?

Effectif d'une ponte : modélisation

1\2	1	2
1	1 1	2π π
2	π 2π	0 0

Effectif d'une ponte : modélisation

1\2	1	2
1	1 , 1	π , 2π
2	2π , π	0 , 0

Soit p la proportion des femelles pondant un seul œuf

E.S.S.: $p + \pi(1 - p) = 2\pi p$, soit $p = \pi/(3\pi - 1)$.

Effectif d'une ponte : modélisation

$1\backslash 2$	1	2
1	1 1	2π π
2	π 2π	0 0

Soit p la proportion des femelles pondant un seul œuf

E.S.S.: $p + \pi(1-p) = 2\pi p$, soit $p = \pi/(3\pi - 1)$.

Fitness $F = 2\pi^2/(3\pi - 1)$. $\pi = 1/2 \Rightarrow F = 1$

Effectif d'une ponte : modélisation

$1\backslash 2$	1	2
1	1 , 1	π , 2π
2	2π , π	0 , 0

Soit p la proportion des femelles pondant un seul œuf

E.S.S.: $p + \pi(1-p) = 2\pi p$, soit $p = \pi/(3\pi - 1)$.

Fitness $F = 2\pi^2/(3\pi - 1)$. $\pi = 1/2 \Rightarrow F = 1$,
$\pi = 2/3 \Rightarrow F = 8/9$. Améliorer

la ressource diminue la fitness : **Un paradoxe de Braess**

Dynamique de réplication

Soit n_i l'effectif de la population avec le trait i, et $q_i = n_i / \sum_k n_k$, et $f = Aq$ le vecteur des fitness. Supposons que

$$\frac{\dot{n}_i}{n_i} = f_i \,.$$

Alors (exercice)

$$\dot{q}_i = q_i[f_i - \langle q, f \rangle] = q_i[\langle e_i, Aq \rangle - \langle q, Aq \rangle] \,. \qquad (\star)$$

Dynamique de réplication

Soit n_i l'effectif de la population avec le trait i, et $q_i = n_i / \sum_k n_k$, et $f = Aq$ le vecteur des fitness. Supposons que

$$\frac{\dot{n}_i}{n_i} = f_i \,.$$

Alors (exercice)

$$\dot{q}_i = q_i[f_i - \langle q, f \rangle] = q_i[\langle e_i, Aq \rangle - \langle q, Aq \rangle] \,. \qquad (\star)$$

Exercice $(\star)$ laisse le simplexe invariant. (Dériver $X = 1 - \sum_i q_i$.)

Dynamique de réplication

Soit n_i l'effectif de la population avec le trait i, et $q_i = n_i / \sum_k n_k$, et $f = Aq$ le vecteur des fitness. Supposons que

$$\frac{\dot{n}_i}{n_i} = f_i \, .$$

Alors (exercice)

$$\dot{q}_i = q_i[f_i - \langle q, f\rangle] = q_i[\langle e_i, Aq\rangle - \langle q, Aq\rangle] \, . \qquad (\star)$$

Exercice $(\star)$ laisse le simplexe invariant. (Dériver $X = 1 - \sum_i q_i$.)

Théorème (un peu plus difficile) Si p est un ESS, et si $q(0)$ est suffisamment proche de p, alors $q(t) \to p$ quand $t \to \infty$.
Si l'ESS est unique, la convergence a lieu pour tout $q(0)$.

THE

END

THE

OUF !

END

Remerciements

Madame M-C. Mondini,

Remerciements

Madame M-C. Mondini,

Vos professeurs,

Remerciements

Madame M-C. Mondini,

Vos professeurs,

Vous.