

Histogrammes de trafic bursty : agrégations bornantes optimales

Farah Ait Salaht¹ Hind Castel-Taleb² Jean-Michel
Fourneau¹ Nihal Pekergin³

¹PRISM, UVSQ

²INSTITUT TELECOM, Telecom SudParis

³LACL, Université Paris-Est Val de Marne



Plan

- Motivations
- Problématique du trafic bursty
- Analyse de file avec histogramme de trafic bursty
- Théorie des ordres stochastiques
- Algorithme optimal de génération d'histogrammes bornants
 - Monotonie des mesures de performance
 - Application de l'algorithme de bornes : résultats numériques
- Conclusion

Outline

- 1 Contexte, motivations
- 2 Analyse du trafic bursty
- 3 Analyse de file avec histogramme de trafic bursty
- 4 Théorie des ordres stochastiques
- 5 Algorithme optimal basé sur la programmation dynamique
- 6 Monotonie des mesures de performances en fonction des histogrammes d'entrée
- 7 Conclusion

Motivations

- Variabilité du trafic IP, dégradation des performances (rafales)-> **Dimensionnement du réseau en fonction de la variabilité du trafic**
- Analyse par la théorie des files d'attente :
 - Arrivées et services Exponentiels, formules mathématiques (formule d'Erlang)
 - Trafic général :
 - Modèles de trafic ON/OFF (MMPP)
 - Méthodes numériques
- Problèmes : matrices de grandes tailles, précision des modèles, résultats approximatifs-> **Solution : Agrégations bornantes des histogrammes de traces de trafic exactes**
- **Résultats : bornes sur les mesures de performance : compromis entre qualité et précision des résultats**

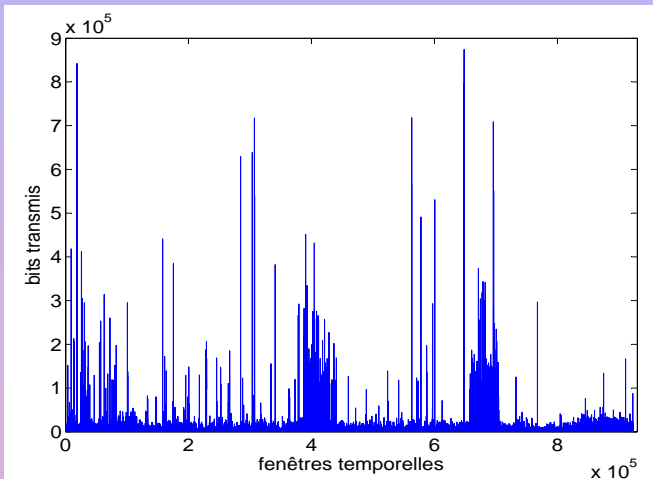
Outline

- 1 Contexte, motivations
- 2 Analyse du trafic bursty**
- 3 Analyse de file avec histogramme de trafic bursty
- 4 Théorie des ordres stochastiques
- 5 Algorithme optimal basé sur la programmation dynamique
- 6 Monotonie des mesures de performances en fonction des histogrammes d'entrée
- 7 Conclusion

Représentation d'une trace de trafic bursty

Trace de trafic IP sur 10 heures, ligne transpacifique de 128 Kbytes/s

Période d'échantillonnage de 40 ms, nombre d'états : 922873



Caractérisation du trafic bursty

3 phases de trafic considérées selon des seuils de débits:

- faible (≤ 10 Kbps), moyen ($10\text{Kbps} < \text{debit} < 100\text{Kbps}$), élevé (≥ 100 Kbps)
- La matrice de transition entre les phases est :

$$M[i,j] = \frac{\text{nombre de transitions entre la phase } i \text{ et la phase } j}{\text{nombre de slots en phase } i}.$$

Exemple de matrice de transition pour le trafic bursty MAWI

La matrice de transition de phases pour le trafic bursty de la trace MAWI est

$$M = \begin{pmatrix} 0.9982 & 0.0018 & 0.0000 \\ 0.5563 & 0.4163 & 0.0274 \\ 0.2706 & 0.2615 & 0.4679 \end{pmatrix}$$

- phase 1 : 1228 états, en moyenne 433.56 bits
- phase 2 : 2568 états, en moyenne 28953 bits
- phase 3 : 783 états, en moyenne $2.1515 \cdot 10^5$ bits

Chaîne de Markov du processus de changement de phase

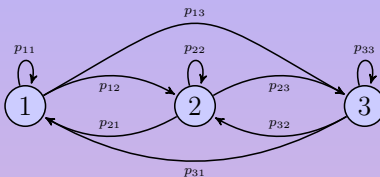


Figure 2 : Exemple de graphe de transition d'une chaîne de Markov avec trois phases.

Outline

- 1 Contexte, motivations
- 2 Analyse du trafic bursty
- 3 Analyse de file avec histogramme de trafic bursty**
- 4 Théorie des ordres stochastiques
- 5 Algorithme optimal basé sur la programmation dynamique
- 6 Monotonie des mesures de performances en fonction des histogrammes d'entrée
- 7 Conclusion

Equation d'évolution

Chaîne de Markov à temps discret $\{QP(k), k \geq 0\}$,
 $QP(k) = (Q(k), \phi(k))$

- $Q(k)$: est le nombre de clients au slot k
- $\phi(k)$: est la phase au slot k ,

On note par $A^{\phi(k)}$ les arrivées à la phase $\phi(k)$

$QP(k) \rightarrow QP(k+1) = (Q(k+1), \Phi(k+1))$

$$Q(k+1) = \min \left(B, (Q(k) + A^{\phi(k)} - S)^+ \right). \quad (1)$$

Analyse de la chaîne de Markov

- L'espace d'état de $\{QP(k), k \geq 0\}$ is $S = \mathcal{N} \times \mathcal{P}$, peut être très grand
- Nous proposons :
 - d'utiliser la comparaison stochastique pour générer des histogrammes agrégés bornants pour les histogrammes d'arrivées $A^{\phi(k)}$.
 - utiliser l'ordre stochastique \leq_{st}
 - montrer la monotonie des mesures de performances

Outline

- 1 Contexte, motivations
- 2 Analyse du trafic bursty
- 3 Analyse de file avec histogramme de trafic bursty
- 4 Théorie des ordres stochastiques**
- 5 Algorithme optimal basé sur la programmation dynamique
- 6 Monotonie des mesures de performances en fonction des histogrammes d'entrée
- 7 Conclusion

Ordre stochastique \leq_{st}

Definition

$$X \leq_{st} Y \iff \mathbb{E}f(X) \leq \mathbb{E}f(Y)$$

for all non decreasing functions $f : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}^+$ whenever expectations exist.

Proposition

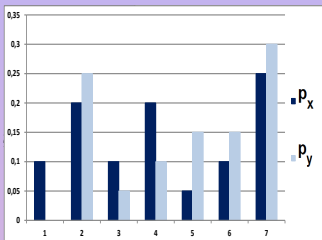
$$X \leq_{st} Y \iff \forall i, 1 \leq i \leq n, \sum_{k=i}^n d2(k) \leq \sum_{k=i}^n d1(k) \quad (2)$$

Example:

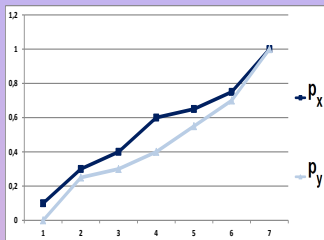
On considère $\mathcal{G} = \{1, 2, \dots, 7\}$,

$\mathbf{p}_X = [0.1, 0.2, 0.1, 0.2, 0.05, 0.1, 0.25]$ et

$\mathbf{p}_Y = [0, 0.25, 0.05, 0.1, 0.15, 0.15, 0.3]$.



The pmf of a discrete distributions X and Y



Cumulative distribution functions

Outline

- 1 Contexte, motivations
- 2 Analyse du trafic bursty
- 3 Analyse de file avec histogramme de trafic bursty
- 4 Théorie des ordres stochastiques
- 5 Algorithme optimal basé sur la programmation dynamique**
- 6 Monotonie des mesures de performances en fonction des histogrammes d'entrée
- 7 Conclusion

Distributions de probabilités bornantes

Pour une distribution donnée d de taille N , et une mesure

$$\sum_{i \in \mathbb{E}} r(i) d(i) \quad (r : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^+),$$

\Rightarrow **On calcule des distributions bornantes $d1$ et $d2$ de taille $K < N$ tel que :**

- 1 $d2 \leq_{st} d \leq_{st} d1$,
- 2 $\sum_{i \in \mathbb{E}'} r(i) d2(i) - \sum_{i \in \mathbb{E}'} r(i) d(i)$ est minimal parmi toutes les distributions sur n états, stochastiquement plus petites que d ,
- 3 $\sum_{i \in \mathbb{E}''} r(i) d1(i) - \sum_{i \in \mathbb{E}''} r(i) d(i)$ est minimal parmi toutes les distributions sur n états, stochastiquement plus grandes que d .

Exemple

Soient :

- $\mathbb{E} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
- $\mathbf{r}[i] = i$,
- $\mathbf{d} = [0.3, 0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2]$. La mesure de performance $R = 3.4$.

Si on supprime les états 2, 3, 6, on trouve :

- $\mathbf{d} = [0.5, 0.1, 0.4]$ est une borne inférieure de \mathbf{d}
- sur l'espace d'état $\mathbb{F} = \{1, 4, 5\}$,
- et la mesure de performance est 2.9.

Réduction bornante d'histogramme

Algorithme optimal basé sur la programmation dynamique

- Problème de théorie des graphes.
- On considère un graphe pondéré $G = (V, E)$ with:

▶ **Borne inférieure:**

$$w(e) = \sum_{j \in \mathcal{H}: u < j < v} \mathbf{d}(j)(\mathbf{r}(j) - \mathbf{r}(u))$$

▶ **Borne supérieure:**

$$w(e) = \sum_{j \in \mathcal{H}: u < j < v} \mathbf{d}(j)(\mathbf{r}(v) - \mathbf{r}(j))$$

Calcul de la borne optimale \equiv Calcul du chemin le plus court dans le graphe G avec K noeuds ($K \ll N$).

- La masse de probabilité des noeuds supprimés est sommée avec
 - ▶ **Lower Bound:** le prédécesseur immédiat
 - ▶ **Upper Bound:** le successeur immédiat

Réduction bornante d'histogramme

Algorithme optimal basé sur la programmation dynamique

- Problème de théorie des graphes.
- On considère un graphe pondéré $G = (V, E)$ with:

▶ **Borne inférieure:**

$$w(e) = \sum_{j \in \mathcal{H}: u < j < v} \mathbf{d}(j)(\mathbf{r}(j) - \mathbf{r}(u))$$

▶ **Borne supérieure:**

$$w(e) = \sum_{j \in \mathcal{H}: u < j < v} \mathbf{d}(j)(\mathbf{r}(v) - \mathbf{r}(j))$$

Calcul de la borne optimale \equiv Calcul du chemin le plus court dans le graphe G avec K noeuds ($K \ll N$).

- La masse de probabilité des noeuds supprimés est sommée avec
 - ▶ **Lower Bound:** le prédécesseur immédiat
 - ▶ **Upper Bound:** le successeur immédiat

Réduction bornante d'histogramme

Algorithme optimal basé sur la programmation dynamique

- Problème de théorie des graphes.
- On considère un graphe pondéré $G = (V, E)$ with:

▶ **Borne inférieure:**

$$w(e) = \sum_{j \in \mathcal{H}: u < j < v} \mathbf{d}(j)(\mathbf{r}(j) - \mathbf{r}(u))$$

▶ **Borne supérieure:**

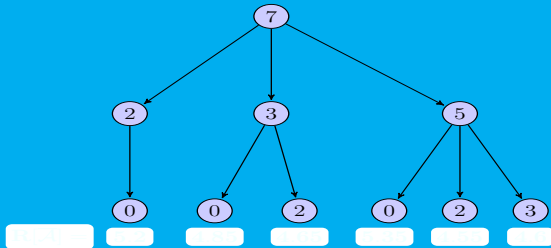
$$w(e) = \sum_{j \in \mathcal{H}: u < j < v} \mathbf{d}(j)(\mathbf{r}(v) - \mathbf{r}(j))$$

Calcul de la borne optimale \equiv Calcul du chemin le plus court dans le graphe G avec K noeuds ($K \ll N$).

- La masse de probabilité des noeuds supprimés est sommée avec
 - ▶ **Lower Bound:** le prédécesseur immédiat
 - ▶ **Upper Bound:** le successeur immédiat

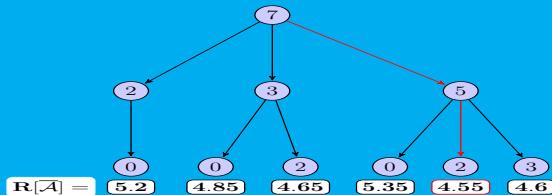
Exemple: borne optimale supérieure

- $\mathbf{A} = \{0, 2, 3, 5, 7\}$, $p(\mathbf{A}) = [0.05, 0.3, 0.15, 0.2, 0.3]$,
fonction de récompense $\mathbf{r} : \forall a_i \in \mathbf{A}, \mathbf{r}(a_i) = a_i$,
 $R[\mathcal{A}] = \sum_{a_i \in \mathbf{A}} \mathbf{r}(a_i) p_{\mathbf{A}}(i) = 4.15$
- Calcul de la borne supérieure optimale : $\bar{\mathcal{A}}$ sur 3 états,
 $R[\bar{\mathcal{A}}] - R[\mathcal{A}]$ est minimal.



Exemple: Borne supérieure optimale

- $\mathcal{A} = (\mathbf{A}, p(\mathbf{A}))$, $\mathbf{A} = \{0, 2, 3, 5, 7\}$,
 $p(\mathbf{A}) = [0.05, 0.3, 0.15, 0.2, 0.3]$, $\mathbf{r} : \forall a_i \in \mathbf{A}, \mathbf{r}(a_i) = a_i$,
 $R[\mathcal{A}] = \sum_{a_i \in \mathbf{A}} \mathbf{r}(a_i) p_{\mathbf{A}}(i) = 4.15$.
- Calcul de la borne supérieure optimale $\bar{\mathcal{A}}$, 3 états,
 $R[\bar{\mathcal{A}}] - R[\mathcal{A}]$ est minimal.



$\bar{\mathcal{A}} = (\bar{\mathbf{A}}, p(\bar{\mathbf{A}}))$ with $\bar{\mathbf{A}} = \{2, 5, 7\}$, $p(\bar{\mathbf{A}}) = [0.35, 0.35, 0.3]$ and $R[\bar{\mathcal{A}}] = 4.55$.

Outline

- 1 Contexte, motivations
- 2 Analyse du trafic bursty
- 3 Analyse de file avec histogramme de trafic bursty
- 4 Théorie des ordres stochastiques
- 5 Algorithme optimal basé sur la programmation dynamique
- 6 Monotonie des mesures de performances en fonction des histogrammes d'entrée**
- 7 Conclusion

Agrégations optimales des histogrammes d'arrivées

- Soit A^i l'histogramme des arrivées à la phase i du système $\{QP(k), k \geq 0\}$
- Soit \tilde{A}^i l'histogramme bornant agrégé du système bornant $\{\tilde{Q}P(k), k \geq 0\}$
- Agrégation bornante des histogrammes d'arrivée par phase -> comparaison stochastique des systèmes en supposant les états dans la même phase

Comparaisons stochastiques

Soit $x = (x_Q, x_\phi)$ un état de la DTMC $\{QP(k), k \geq 0\}$, On définit l'ordre partiel sur S , noté \preceq : $x = (x_Q, x_\phi)$ et $y = (y_Q, y_\phi) \in S$,

$$x \preceq y \text{ ssi } x_Q \leq y_Q \text{ et } x_\phi = y_\phi$$

$$g : S \rightarrow \mathcal{N} : g(x_Q, x_\phi) = x_Q.$$

Theorem

Si $\forall i \in \mathcal{P}, A^i \leq_{st} \tilde{A}^i, Q(0) \leq_{st} \tilde{Q}(0)$ et $\phi(0) = \tilde{\phi}(0)$, alors

$$\forall k, g(QP(k)) \leq_{st} g(\tilde{Q}P(k)).$$

Preuves

- $\{QP(k), k \geq 0\}$ est \preceq_{st} monotone, donc $g(QP(k))$ est \leq_{st} -monotone car g est croissante.
- Comparaison des probabilités de transition :
 $\forall i \in \mathcal{S}$ et $\forall l \in \mathcal{N}$:

$$\begin{aligned} & \text{Prob}(g(QP(k+1)) > l \mid QP(k) = i) \\ & \leq \text{Prob}(g(\tilde{Q}P(k+1)) > l \mid \tilde{Q}P(k) = i) \end{aligned}$$

Bornes sur les mesures de performances

- Π (resp. $\tilde{\Pi}$) la distribution stationnaire de $QP(k)$ (resp. $\tilde{Q}P(k)$)
- $\mathbb{E}[Q]$ (resp. $\mathbb{E}[\tilde{Q}]$) nombre d'entités moyen dans le tampon

D'après : $\forall k, g(QP(k)) \leq_{st} g(\tilde{Q}P(k))$, alors

$$\sum_{g(a) \geq l} \Pi[a] \leq \sum_{g(a) \geq l} \tilde{\Pi}[a]$$

Donc (puisque g est croissante) :

$$\mathbb{E}[Q] = \sum_{a \in \mathcal{S}} g(a) \Pi[a] \leq \sum_{a \in \mathcal{S}} g(a) \tilde{\Pi}[a] = \mathbb{E}[\tilde{Q}].$$

Et pour les probas de blocage

$$\sum_{a \in \mathcal{S} | g(a) = B} \Pi[a] \leq \sum_{a \in \mathcal{S} | g(a) = B} \tilde{\Pi}[a].$$

Probabilités de blocage

	Arr. Stationnaire	Arrivées SBBP				
	Exact	Exact	20		100	
			<i>L. b</i>	<i>U. b</i>	<i>L. b</i>	<i>U. b</i>
10^5	0.001701	0.002233	0.002212	0.002284	0.002231	0.002254
$2 \cdot 10^5$	6.8862e-4	0.001586	0.001552	0.001645	0.001585	0.001607
$5 \cdot 10^5$	8.8405e-5	7.1293e-4	6.8067e-4	7.6195e-4	7.1140e-4	7.2380e-4
10^6	1.3199e-7	1.7397e-4	1.5378e-4	1.9987e-4	1.7311e-4	1.7868e-4
$2 \cdot 10^6$	8.1135e-13	1.0925e-5	8.1727e-6	1.3865e-5	1.0470e-5	1.1086e-5
$3 \cdot 10^6$	4.4635e-18	6.4397e-7	4.35007e-7	9.6111e-7	6.3414e-7	6.8729e-7

Table 1 : Probabilités de blocage.

Espérance de la longueur du tampon

	Arr. Stationnaire	Arrivées SBBP				
	Exact	Exact	20		100	
			<i>L. b</i>	<i>U. b</i>	<i>L. b</i>	<i>U. b</i>
10^5	726.993	648.457	638.001	682.785	648.385	666.66
$2 \cdot 10^5$	1392.65	1329.01	1310.74	1388.52	1328.4	1360.83
$5 \cdot 10^5$	2703.81	3689.92	3604.04	3890.79	3685.09	3777.34
10^6	2892.89	6371.5	6074.87	6879.49	6356.7	6543.62
$2 \cdot 10^6$	2893.47	8063.9	7339.35	8678.78	7836.01	8099.39
$3 \cdot 10^6$	2894.41	8019.54	7457.37	8896.6	7992.75	8203.36

Table 2 : Espérance de la longueur du tampon.

Temps d'exécutions

	Arr. Stationnaire	Arrivées SBPP				
	Exact	Exact	20		100	
			<i>L. b</i>	<i>U. b</i>	<i>L. b</i>	<i>U. b</i>
10^5	5.7369	8.9343	1.0528	0.1605	2.2393	0.2176
$2 \cdot 10^5$	15.7843	27.3395	1.3981	0.2096	2.1273	0.2590
$5 \cdot 10^5$	72.8370	102.8670	1.7235	0.3854	2.2599	0.6286
10^6	232.696	487.3540	1.9172	0.8645	2.5104	0.8089
$2 \cdot 10^6$	1163.48	1759.25	2.5062	1.6919	2.8416	1.7036
$3 \cdot 10^6$	1859.63	3380.59	2.8293	2.1639	3.6933	2.5346

Table 3 : Temps de calcul (s).

Outline

- 1 Contexte, motivations
- 2 Analyse du trafic bursty
- 3 Analyse de file avec histogramme de trafic bursty
- 4 Théorie des ordres stochastiques
- 5 Algorithme optimal basé sur la programmation dynamique
- 6 Monotonie des mesures de performances en fonction des histogrammes d'entrée
- 7 Conclusion

Conclusion

- Agrégations bornantes d'histogrammes bursty :
 - Analyse de l'impact du trafic bursty sur les performances de réseaux
 - Proposer des solutions de dimensionnement -> compromis entre complexité et précision.
- Travaux futurs
 - Plus d'exemples numériques sur différentes traces
 - Un nombre d'états agrégés différents selon la phase
 - Analyse de différents types de flux