

Modèles du Laser : structure propriétés

Alain Jean-Marie
INRIA/MAESTRO

Réunion MARMOTE
10 octobre 2013

- 1 Le Modèle
- 2 Générateurs d'une bande
- 3 Distributions
 - Distribution stationnaire
 - Approche avant
 - Approche arrière
- 4 Spectres

- 1 Le Modèle
- 2 Générateurs d'une bande
- 3 Distributions
 - Distribution stationnaire
 - Approche avant
 - Approche arrière
- 4 Spectres

Constituants :

- $2B$ niveaux d'énergie répartis en deux bandes de B niveaux : support des électrons
- deux niveaux particuliers h^* et b^* au milieu de chaque bande
- une cavité : support des photons.

Particules :

- les électrons peuvent changer de niveau dans chaque bande,
- mais deux électrons ne peuvent pas occuper le même niveau
- un électron peut passer de h^* à b^* en émettant un photon dans la cavité
- un électron peut passer de b^* à h^* en absorbant un photon dans la cavité
- les photons peuvent sortir de la cavité
- un “pompage” fait passer un électron du niveau le plus bas au niveau le plus haut.

Hypothèses Markoviennes :

- L'évolution des photons dans chaque bande se fait selon un processus de naissance et mort de taux λ et μ (pour chaque électron)
- L'absorption ou l'émission de photons se font à taux β et γ
- La sortie de photons à taux α (par photon)
- Pompage à taux ϕ . Possiblement plus périodique que Poisson...

Hypothèses physiques :

- λ/μ représente la température
- $\lambda, \mu \gg \beta, \gamma, \phi$.

Puisque les échelles de temps sont si différentes, le processus se décompose en :

- 4 processus indépendant dans les 4 sous-bandes
 - des événements Poissoniens rares
- ⇒ on se focalise sur chaque sous-bande

Deux visions comme automates stochastiques interagissants :

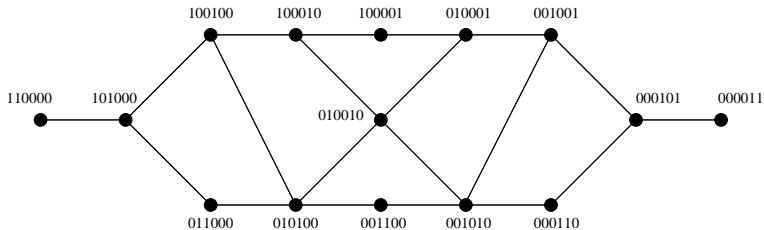
- n électrons évoluant chacun sur $2B$ niveaux
- interagissant entre eux (exclusion)
- interagissant avec les photons
- évolution des photons dans la cavité
- + le pompage

Ou bien :

- 4 sous-bandes avec un nombre donné d'électrons
- interagissant entre elles et avec les photons
- évolution des photons dans la cavité
- + le pompage

- 1 Le Modèle
- 2 Générateurs d'une bande
- 3 Distributions
 - Distribution stationnaire
 - Approche avant
 - Approche arrière
- 4 Spectres

Exemple de diagramme de transition : 6 niveaux, 2 particules.



Simplification du diagramme : taux λ vers la droite, taux μ vers la gauche.

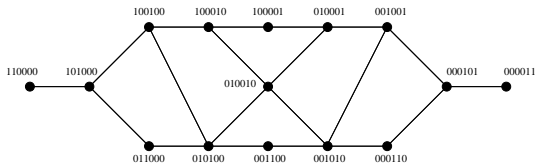
Si on ordonne les états par ordre lexicographique, on obtient la structure réursive :

$$M_{n,m} = \left(\begin{array}{c|cc} & \mathbf{0}_{p \times q} & \mathbf{0}_{p \times r} \\ & \lambda & \\ \hline & \dots & \\ & & \mathbf{0}_{q \times r} \\ \hline & & \lambda \\ \hline \mathbf{0}_{q \times p} & \mu & \\ & \dots & \\ & & \mu \\ \hline \mathbf{0}_{r \times p} & \mathbf{0}_{r \times q} & \\ \hline & & M_{n-1,m} \end{array} \right) .$$

La matrice de base est la matrice $n \times n$ du processus de naissance et mort standard sur n états ($M/M/1/n-1$) :

$$M_{n,1} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & & & \\ \mu & 0 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu & 0 & \lambda \\ & & & \mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Mais si on ordonne par niveau d'énergie totale, on obtient plutôt :



La matrice est alors : $M_{6,2} =$

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------|-----------|-----------|-----------|--|--|--|--|
| - | λ | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| μ | - | λ | λ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | μ | - | 0 | λ | | | | | | | | | | | | | | | |
| | μ | 0 | - | λ | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | μ | 0 | - | 0 | λ | λ | 0 | | | | | | | | | | | |
| | | μ | μ | 0 | - | 0 | λ | λ | | | | | | | | | | | |
| | | | μ | 0 | - | 0 | 0 | 0 | λ | 0 | | | | | | | | | |
| | | | μ | μ | 0 | - | 0 | 0 | λ | λ | | | | | | | | | |
| | | | 0 | μ | 0 | 0 | - | 0 | 0 | λ | | | | | | | | | |
| | | | | μ | μ | 0 | 0 | - | 0 | - | λ | 0 | | | | | | | |
| | | | | 0 | μ | μ | 0 | μ | 0 | - | λ | 0 | λ | | | | | | |
| | | | | | | | | | μ | μ | - | 0 | λ | | | | | | |
| | | | | | | | | | 0 | μ | 0 | - | λ | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | μ | μ | - | λ | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | μ | - | λ | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | μ | - | | | | |

- 1 Le Modèle
- 2 Générateurs d'une bande
- 3 Distributions**
 - Distribution stationnaire
 - Approche avant
 - Approche arrière
- 4 Spectres

La distribution stationnaire est donnée par :

$$\pi_{n,m}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{G(n,m)} \prod_{i=0}^{n-1} \rho^{i\sigma_i} = \frac{1}{G(n,m)} \rho^{\sum_{i=0}^{n-1} i\sigma_i},$$

$$\rho = \lambda/\mu.$$

La fonction de partition $G(n,m)$ est définie par :

$$\begin{aligned} G(n,m) &= \sum_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_{n,m}} \prod_{i=0}^{n-1} \rho^{i\sigma_i} \\ &= \frac{\rho^{m-1} - \rho^n}{1 - \rho^m} \frac{\rho^{m-2} - \rho^n}{1 - \rho^{m-1}} \cdots \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho}. \end{aligned}$$

Preuve : réversibilité et troncation.

La probabilité stationnaire a une structure récursive qui permet de calculer la fonction de partition et produire des algorithmes d'échantillonnage directs.

Le "simplexe" $\mathcal{S}_{n,m}$ se décompose en :

$$\mathcal{S}_{n,m} = \{1\} \times \mathcal{S}_{n-1,m-1} \cup \{0\} \times \mathcal{S}_{n-1,m}, \quad 0 < m < n.$$

On obtient :

$$G(n, m) = \rho^{m-1} G(n-1, m-1) + \rho^m G(n-1, m).$$

$$\pi_{n,m}(\sigma_0 = 1) = \rho^{m-1} \frac{G(n-1, m-1)}{G(n, m)}$$

$$\pi_{n,m}(\sigma_0 = 0) = \rho^m \frac{G(n-1, m)}{G(n, m)}$$

+ valeurs au bord.

Échantillonnage de la distribution stationnaire, mode avart

Data: Deux entiers n et m , $0 \leq n \leq m$

Result: Un vecteur de $\mathcal{S}_{n,m}$ échantillonné selon la distribution $\pi_{n,m}$

begin

$k \leftarrow m$

for i **from** 0 **to** $n - 1$ **do**

if $k = 0$ **then**

$\sigma[i] \leftarrow 0$

else if $k = n - i$ **then**

$\sigma[i] \leftarrow 1$

else

$u \leftarrow \text{Uniform}([0, 1])$

if $u < \rho^k \frac{G(n-1-i, k)}{G(n-i, k)}$ **then**

$\sigma[i] \leftarrow 0$

else

$\sigma[i] \leftarrow 1$

$k \leftarrow k - 1$

return $(\sigma[0], \dots, \sigma[n-1])$

$\mathcal{S}_{n,m}$ se décompose également en :

$$\mathcal{S}_{n,m} = \mathcal{S}_{n-1,m-1} \times \{1\} \cup \mathcal{S}_{n-1,m} \times \{0\}, \quad 0 < m < n.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} G(n, m) &= \rho^{n-1} G(n-1, m-1) + G(n-1, m) \\ \pi_{n,m}(\sigma_{n-1} = 1) &= \rho^{n-1} \frac{G(n-1, m-1)}{G(n, m)} \\ \pi_{n,m}(\sigma_0 = 0) &= \frac{G(n-1, m)}{G(n, m)}. \end{aligned}$$

+ cas de bord.

Algorithme Arrière

Data: Deux entiers n et m , $0 \leq n \leq m$

Result: Un vecteur de $\mathcal{S}_{n,m}$ échantillonné selon la distribution $\pi_{n,m}$

begin

$k \leftarrow m$

for i **from** 1 **to** n **do**

if $k = 0$ **then**

$\sigma[n-i] \leftarrow 0$

else if $k = n - i$ **then**

$\sigma[n-i] \leftarrow 1$

else

$u \leftarrow \text{Uniform}([0, 1])$

if $u < \frac{G(n-i, k)}{G(n-i+1, k)}$ **then**

$\sigma[n-i] \leftarrow 0$

else

$\sigma[n-i] \leftarrow 1$

$k \leftarrow k - 1$

return $(\sigma[0], \dots, \sigma[n-1])$

- 1 Le Modèle
- 2 Générateurs d'une bande
- 3 Distributions
 - Distribution stationnaire
 - Approche avant
 - Approche arrière
- 4 Spectres

Rappel : la matrice de base est

$$M_{n,1} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & & & \\ \mu & 0 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu & 0 & \lambda \\ & & & \mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Ses n valeurs propres sont 0 et

$$\omega_k = -(\lambda + \mu) + 2\sqrt{\lambda\mu} \cos \frac{k\pi}{n}, \quad k = 1..n-1.$$

Constatation : ce sont aussi des valeurs propres de $M_{n,m}$!

Processus d'émission $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, stationnaire.

Autocorrélation : $\rho(h) = \mathbb{E}(X(t+h)X(t))$.

DSP : $\rho^*(\omega) = \int e^{-i\omega h} \rho(h) dh$