WP5, Task 5.5 : Markovian Games and economic problems

Réunion lancement Marmotte

Outline

Présentation du W.P. 5.5

Buts :

1. Offrir aux économistes des outils informatiques reliés aux chaînes de Markov.
    - Pour des modèles "*agent-based*".
    - Pour des jeux stochastiques et le calcul de stratégies.
2. Application à des problèmes réels fournis par des économistes pour montrer l'intérêt du logiciel.

Chaîne de Markov en économie

Chaînes de Markov sont peu utilisées en économie comparativement aux gaussiennes.
En effet, en économie la mémoire des agents est souvent requise et l'utilisation de modèles continus courante.
Cependant les chaînes de Markov sont utilisées comme outil de modélisation (Voir [Stockey and Lucas]) dans :

- longueur de cycles économiques ;
- l'étude de la propagation des risques ;
- problèmes d'économie appliquée (utilisation couplée avec du contrôle) ;
- problèmes de dynamique économique.

Problème de dynamique économique

"*Computational Economy*"

- On approche l'évolution du système par des transitions de slot à slot (d'année en année ou de mois en mois).
- On veut observer comment le système évolue.
- Les probabilités des transitions de la chaine sont le plus souvent calculées à partir de simulation de Monte Carlo.

Modèles "agent based"

Chaque agent

- a sa stratégie fixée et évolue de manière autonome
- ses actions modifient l'ensemble du système
- transitions aléatoires du système modélisées par C.d.M.

Qualitativement : savoir si système va converger vers équilibre
Quantitativement : savoir quelle va être la valeur du jeu.

Jeu statique

Un jeu exprimé sous forme stratégique (avec information complète) est un triplet $(Ag, \{A_i\}_i, R_i)$ où

- Ag est l'ensemble fini de joueurs de taille N.
- A_i est l'ensemble des stratégies a_i du joueur i.
- $R_i(a)$ est la récompense du joueur i,
  avec $a = (a_1, \dots a_N)$ l'ensemble (ou combinaison) des stratégies des joueurs.

stratégie pure : action choisie de manière déterministe.
stratégie mixte : action choisie de manière probabiliste :
$\pi_i^{a_i}$ probabilité du joueur i de jouer a_i.

L'**utilité** de l'agent i est

$$u^{\pi_i, \pi_{-i}} = \sum_{a_i \in A_i} \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} R(a_i, a_{-i}) \pi_i^{a_i} \pi_{-i}^{a_{-i}}.$$

Jeu statique et équilibre de Nash

On appelle *meilleure réponse* du joueur i le terme

$$br_i \;:\; a_{-i} \mapsto \arg\max_{a_i \in A_i} R_i(a_i, a_{-i}).$$

Définition (Équilibre de Nash en stratégie pure)

Une combinaison a^* de stratégies pures est un Équilibre de Nash si pour tout i, $a_i^* = br_i(a_{-i}^*)$ c'est-à-dire :

$$R(a_i^*, {a^*}_{-i}) \geq R(a_i, a_{-i}^*) \quad \forall\ a_i \in A_i.$$

Définition (Équilibre de Nash en stratégie mixte)

Une combinaison π^* de stratégies mixtes est un Équilibre de Nash si pour tout i

$$u(\pi_i^*, {\pi^*}_{-i}) \geq u(\pi_i, {\pi^*}_{-i}) \quad \forall\ \pi_i$$

Jeu dynamique

Un jeu dynamique est un jeu joué plusieurs fois dans le temps.

Ainsi, les joueurs peuvent "apprendre" des actions passées.
Ainsi, l'état du jeu peut varier entre deux occurences du jeu.

Plusieurs formes de jeu dynamique

- Jeu sous forme extensive
  les joueurs jouent de manière séquentielle
- Jeu répété
  les joueurs jouent de manière simultanée
- Jeu répété stochastique
  L'évolution du système dépend des actions des joueurs **et** d'un aléa.

Jeu répété stochastique

Un jeu répété stochastique (ou jeu stochastique) peut être vu comme un *competitive MDP* : un processus de décision markovien à plusieurs joueurs.

Définition

Un jeu stochastique est un quintuplet $(Ag, S, \mathbf{A}, R, T)$ où

- Ag est l'ensemble fini de joueurs de taille N,
- S l'ensemble d'états,
- $\mathbf{A} = \{A_i\}_{i \in \{1,\ldots,N\}}$ avec A_i l'ensemble des actions a_i du joueur i,
- R_i est la récompense du joueur i dépend de l'état et des actions des joueurs,
- T l'évolution du système qui dépend de l'état courant et des actions des joueurs.

Équilibre de Nash

L'**utilité espérée** $u_i^\pi(s)$ est : l'espérance de la récompense immédiate en l'état s sachant l'ensemble des stratégies π.
L'**utilité** $U_i(s)$ est l'espérance de la somme (discountée ou non) des utilités espérées.

$$U_i^\pi(s) = \mathbb{E}_s \sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t (u_i^\pi(s))^t.$$

avec γ le facteur de discount.

Définition (Équilibre de Nash en jeu stochastique)

Un vecteur de stratégies $\pi^* = (\pi_1^*, \ldots, \pi_N^*)$ est un équilibre de Nash si, pour tout $s \in S$ et pour tout joueur i on a

$$U_i^{\pi^*}(s) \geq U_i^{(\pi_1^*, \ldots, \pi_{i-1}^*,\ \pi_i\ ,\pi_{i+1}^*, \ldots, \pi_N^*)}(s) \qquad \forall \pi_i\ .$$

Perfect Equilibrium

Similairement aux MDP et règles de décision Markoviennes (stationnaires déterministes).

On s'intéresse à des équilibres particuliers : Equilibre de Markov parfait.

Un équilibre est un **équilibre de Nash parfait du sous jeu** si c'est un équilibre de Nash de tout sous jeu du jeu original.

Définition (Equilibre de Markov parfait)

Un vecteur de stratégies est un équilibre de Markov parfait si

- *Les stratégies sont sans mémoire et ne dépendent que de l'état courant.*
- *Les stratégies sont équilibres de Nash parfait du sous jeu*
- *L'information relative à la récompense est entièrement contenue dans l'état.*

De tels équilibres sont utilisés en économie industrielle.

Technique de résolutions

La recherche pour résoudre un jeu a deux parties :

1. Partie Jeu : trouver une solution au jeu.
   i.e. trouver la meilleure stratégie pour chaque joueur et l'équilibre du jeu.
   (équivalent à trouver la meilleure action pour chaque état dans le cas des MDP)
2. Partie temporelle qui prend en compte l'aspect multi état.

algorithmes de résolution

- Partie jeu : technique de théorie des jeux classiques ou jeu fictif ou descente de gradient
- Partie temporelle : résolue par itération de valeur ou par apprentissage par renforcement

Attention aux pb de coordination dans partie jeu.

Travail projeté

- Equilibres
  - Revue de la Littérature
  - Implémentation des algorithmes
  - améliorations des méthodes à l'aide des résultats des WP3 et WP4
- Computational economy
  Appliquer ces notions à des problèmes réels